МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра МИС и ПО

Методические указания к выполнению РГР по теме:

"Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия"

по дисциплине **"Математика "** для специальности
21.03.01 Нефтегазовое дело
для студентов очной формы обучения

Мурманск
2019 г.

Оглавление

Введение.

Методические указания к выполнению РГР содержат задания на выполнение РГР№1 **"Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия"** по дисциплине **"Математика "**, а также решение примерного варианта РГР.

Расчетно-графическая работа по дисциплине выполняется в соответствии с учебным планом по специальности.

Целью РГР являются систематизация, расширение и углубление знаний, полученных при теоретическом изучении дисциплины, с тем, чтобы студент мог использовать полученные знания на практике.

Приступая к выполнению расчетно-графической работы, необходимо ознакомиться с соответствующими разделами программы курса и методическими указаниями.

РГР должна быть выполнено и представлено в срок, установленный кафедрой.

При выполнении задания студенту необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. В работе должен быть указан номер варианта работы.
2. Вариант каждой задачи выбирается по последней цифре номера зачетной книжки студента. Самовольная замена одного варианта задания другим не разрешается.
3. Перед решением задания должно быть приведено его условие. Отделите решение задачи от ее условия некоторым интервалом.
4. Решение задания следует сопровождать развернутыми расчетами.
5. Выполненная работа должна быть оформлена в соответствии с требованиями по оформлению письменных работ.
6. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты, а также выполнить все рекомендации.
7. Студенты, не получившие зачета по предусмотренным учебным планом письменным работам, к экзамену не допускаются.
8. Работы, выполненные не по своему варианту, рецензированию не подлежат.

Задания для выполнения

РГР №1 "Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия"

Задача 1. Даны координаты вершин треугольника ABC.

№ варианта	Координаты точек	№ варианта	Координаты точек
1	$A(-2; -3)$, $B(2; 7)$, $C(6; -1)$	6	$A(3; -3)$, $B(-4; 1)$, $C(-2; 5)$
2	$A(-5; 1)$, $B(6; 3)$, $C(-4; -7)$	7	$A(3; 5)$, $B(-2; 2)$, $C(2; -4)$
3	$A(4; 5)$, $B(-3; 2)$, $C(5; -4)$	8	$A(-2; 4)$, $B(5; 6)$, $C(3; -4)$
4	$A(7; -7)$, $B(1; 2)$, $C(-5; -4)$	9	$A(3; 7)$, $B(-4; 1)$, $C(-2; -5)$
5	$A(-3; 4)$, $B(4; 5)$, $C(8; -3)$	10	$A(4; 3)$, $B(-3; -2)$, $C(-7; 2)$

Требуется:

1) вычислить длину стороны BC;
2) составить уравнение стороны BC;
3) найти внутренний угол треугольника при вершине B;
4) составить уравнение высоты AK, проведенной из вершины A;
5) найти координаты центра тяжести однородного треугольника (точки пересечения его медиан);
6) сделать чертеж в системе координат.

Задача 2. Даны координаты точки A, уравнение прямой l и число λ.

№ варианта	Координаты точки	Уравнение прямой l	Число λ	№ варианта	Координаты точки	Уравнение прямой l	Число λ
1	$A(-1; 0)$	$y + 2 = 0$	1: 1	6	$A(-5; 1)$	$x + 1 = 0$	1: 1
2	$A(3; 1)$	$3x = 16$	3 : 4	7	$A(5; -4)$	$5x = 1$	5 : 1
3	$A(3; 0)$	$x = 0$	2 : 1	8	$A(1; 0)$	$2x = 7$	2 : 3
4	$A(2; 0)$	$4x = 1$	4 : 3	9	$A(1; 2)$	$x = 4$	1 : 2
5	$A(0; 0)$	$2x + 5 = 0$	2 : 3	10	$A(3; 2)$	$3x = 1$	3 : 1

Найти уравнение траектории точки M, которая движется в плоскости так, что отношение ее расстояний до точки A и до прямой l равно λ. Сделать чертеж в системе координат.

Задача 3. Дано уравнение кривой 2-го порядка.

№ вар.	Уравнение кривой	№ вар.	Уравнение кривой

1	$7x^2 - 9y^2 + 42x + 18y - 9 = 0$	6	$9x^2 + 4y^2 - 54x + 8y + 49 = 0$
2	$x^2 + 2x - 12y + 37 = 0$	7	$x^2 - 10x + 4y + 17 = 0$
3	$5x^2 + 9y^2 + 10x - 54y + 41 = 0$	8	$3x^2 - y^2 - 30x - 2y + 62 = 0$
4	$y^2 + 6x + 6y - 3 = 0$	9	$y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$
5	$5x^2 - 4y^2 - 20x - 24y - 36 = 0$	10	$7x^2 + 16y^2 - 56x + 64y + 64 = 0$

Привести заданное уравнение к каноническому виду путем параллельного переноса осей координат. Определить тип кривой, найти ее характерные элементы в исходной системе координат. Изобразить на чертеже расположение кривой относительно обеих систем координат.

Задача 4. Даны уравнение кривой 2-го порядка и уравнение прямой.

№ варианта	Уравнение кривой	Уравнение прямой
1	$x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 3 = 0$	$x + 2y + 3 = 0$
2	$x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 6 = 0$	$x + 2y = 0$
3	$x^2 + 6x - 16y + 25 = 0$	$x - 4y + 15 = 0$
4	$x^2 + 4y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$	$x - 2y - 5 = 0$
5	$y^2 - 4x - 6y - 15 = 0$	$2x + y - 3 = 0$
6	$x^2 - 5y^2 + 10x + 20y - 15 = 0$	$x - 5y + 15 = 0$
7	$x^2 + 4y^2 + 2x - 32y + 45 = 0$	$x - y + 5 = 0$
8	$x^2 - 4x + 8y + 44 = 0$	$x - 2y - 20 = 0$
9	$2x^2 - y^2 - 16x - 6y + 19 = 0$	$x - y - 7 = 0$
10	$y^2 + 10x + 8y - 34 = 0$	$2x + y + 4 = 0$

Требуется:

1) привести заданное уравнение кривой 2-го порядка к каноническому виду;
2) найти точки пересечения кривой и заданной прямой;
3) построить обе линии в исходной системе координат.

Задача 5. Даны многочлен $f(x)$ и матрица A.

№ варианта	многочлен $f(x)$	Матрица A

1	$f(x) = -x^2 + 5x + 3$	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
2	$f(x) = -2x^2 + 4x + 7$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
3	$f(x) = 3x^2 + x + 2$	$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
4	$f(x) = 2x - x^2 - 3$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
5	$f(x) = 3x + x^2 - 2$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$
6	$f(x) = 2(1 - x)^2$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
7	$f(x) = (3 - x)^2$	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$
8	$f(x) = -3(x^2 - x + 1)$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
9	$f(x) = 2x - x^2 + 1$	$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
10	$f(x) = 4(x^2 - x) - 3$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Требуется найти значение матричного многочлена $f(A)$.

Задача 6. Дана система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными.

№ варианта	Система уравнений	№ варианта	Система уравнений
1	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10, \\ 3x_1 + 5x_3 = -11. \end{cases}$	6	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_3 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ -x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$	7	$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -9, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$	8	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_3 = -1. \end{cases}$	9	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -9. \end{cases}$	10	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -14. \end{cases}$

Требуется:

1) записать систему в матричном виде;

2) найти решение системы с помощью формул Крамера;

3) решить систему при помощи обратной матрицы.

Задача 7. Даны координаты трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и вектор $\vec{d}$.

№ варианта	Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	Вектор $\vec{d}$
1	$\vec{a} = \{6; 3; -2\}, \quad \vec{b} = \{3; -2; 6\}, \quad \vec{c} = \{0; 1; -2\}$	$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$
2	$\vec{a} = \{2; -1; 1\}, \quad \vec{b} = \{0; -3; 4\}, \quad \vec{c} = \{3; 3; 4\}$	$\vec{d} = -\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$

3	$\vec{a}=\{2;1;0\},\quad \vec{b}=\{-1;2;2\},\quad \vec{c}=\{3;7;-1\}$	$\vec{d}=3\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$
4	$\vec{a}=\{4;3;0\},\quad \vec{b}=\{3;-2;6\},\quad \vec{c}=\{0;1;-2\}$	$\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$
5	$\vec{a}=\{2;1;-3\},\quad \vec{b}=\{1;2;1\},\quad \vec{c}=\{1;-3;1\}$	$\vec{d}=-2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$
6	$\vec{a}=\{1;2;-2\},\quad \vec{b}=\{2;2;-1\},\quad \vec{c}=\{0;-1;-2\}$	$\vec{d}=4\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$
7	$\vec{a}=\{4;3;0\},\quad \vec{b}=\{2;1;2\},\quad \vec{c}=\{-3;-2;5\}$	$\vec{d}=-3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$
8	$\vec{a}=\{1;4;0\},\quad \vec{b}=\{-3;2;-6\},\quad \vec{c}=\{3;-5;-4\}$	$\vec{d}=-\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$
9	$\vec{a}=\{4;0;2\},\quad \vec{b}=\{-1;2;-2\},\quad \vec{c}=\{2;-2;-3\}$	$\vec{d}=5\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$
10	$\vec{a}=\{1;-1;1\},\quad \vec{b}=\{1;0;1\},\quad \vec{c}=\{2;3;4\}$	$\vec{d}=2\vec{a}-4\vec{b}-\vec{c}$

Требуется:

1) вычислить модуль вектора $\vec{a}$;
2) найти координаты вектора $\vec{d}$;
3) найти угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
4) вычислить проекцию вектора $\vec{c}$ на направление вектора $\vec{b}$;
5) вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
6) вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Задача 8. Даны координаты точек – вершин пирамиды *ABCD*.

№ варианта	Координаты точек
1	$A(1; 2; –1)$, $B(0; 0; 1)$, $C(1; –3; 3)$, $D(2; –1; –1)$
2	$A(7; 2; 4)$, $B(7; –1; –2)$, $C(3; 3; 1)$, $D(4; 2; 1)$
3	$A(1; 3; 6)$, $B(2; 2; 1)$, $C(–1; 0; 1)$, $D(–4; 6; –3)$
4	$A(–2; 0; –4)$, $B(–1; 7; 1)$, $C(4; –8; –4)$, $D(1; –4; 6)$
5	$A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; –1)$, $C(5; –2; 3)$, $D(3; 2; –1)$
6	$A(–1; 1; 2)$, $B(2; 1; –2)$, $C(–2; 0; 4)$, $D(2; –1; 2)$
7	$A(4; 2; 5)$, $B(2; –3; 0)$, $C(–10; 5; 8)$, $D(–5; 2; 4)$
8	$A(2; –1; 1)$, $B(–1; –3; 2)$, $C(–2; 3; 1)$, $D(–1; 2; –3)$
9	$A(–1; 1; 2)$, $B(–2; 0; 3)$, $C(3; 6; –3)$, $D(–1; –2; 7)$
10	$A(4; –1; 3)$, $B(–2; 1; 0)$, $C(0; –5; 1)$, $D(–2; 1; –1)$

Требуется:

1) вычислить длину ребра *AB*;
2) найти уравнение плоскости грани *ABC*;
3) найти угол α между гранями *ABC* и *BCD*;

4) составить параметрические уравнения прямой *AB*;
5) составить канонические уравнения высоты пирамиды *DK*, проведенной из вершины *D*;
6) найти координаты точки пересечения *DK* и грани *ABC*;
7) найти угол β между ребрами *AB* и *BC*;
8) найти угол γ между ребром *AD* и гранью *ABC*;
9) сделать чертеж пирамиды в системе координат.

Решение примерного варианта РГР №1

Задача 1. Даны координаты вершин треугольника ABC:

$$A(-3;\,-1),\quad B(4;\,6),\quad C(8;\,-2).$$

Требуется: 1) вычислить длину стороны BC; 2) составить уравнение стороны BC; 3) найти внутренний угол треугольника при вершине B; 4) составить уравнение высоты AK, проведенной из вершины A; 5) найти координаты центра тяжести однородного треугольника (точки пересечения его медиан); 6) сделать чертеж в системе координат.

Задача 2. Даны координаты точки $A(3;\,0)$, уравнение прямой l: $3x = 4$ и число $\lambda = 3 : 2$.

Найти уравнение траектории точки M, которая движется в плоскости так, что отношение ее расстояний до точки A и до прямой l равно λ. Сделать чертеж в системе координат.

Задача 3. Дано уравнение кривой 2-го порядка:

$4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$.

Привести заданное уравнение к каноническому виду путем параллельного переноса осей координат. Определить тип кривой, найти ее характерные элементы в исходной системе координат. Изобразить на чертеже расположение кривой относительно обеих систем координат.

Задача 4. Даны уравнение кривой 2-го порядка $3x-2y^2+8y-9=0$ и уравнение прямой l: $x + 2y - 3 = 0$.

Требуется: 1) привести заданное уравнение кривой 2-го порядка к каноническому виду; 2) найти точки пересечения кривой и заданной прямой; 3) построить обе линии в исходной системе координат.

Задача 5. Даны многочлен $f(x)$ и матрица A:

$$f(x)=3x^2-5x+2,\quad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Требуется найти значение матричного многочлена $f(A)$.

Задача 6. Дана система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3=8,\\ 2x_1-3x_2=7,\\ x_1+5x_2+x_3=0.\end{cases}$

Требуется:

1) записать систему в матричном виде;

2) найти решение системы с помощью формул Крамера;

3) решить систему при помощи обратной матрицы.

Задача 7. Даны координаты трех векторов: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и вектор $\vec{d}$:

$$\vec{a} = \{-2; 2; -1\},\ \vec{b} = \{0; -3; 4\},\ \vec{c} = \{1; 0; -2\},\ \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}.$$

Требуется:

1) вычислить модуль вектора $\vec{a}$;

2) найти координаты вектора $\vec{d}$;

3) найти угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

4) вычислить проекцию вектора $\vec{c}$ на направление вектора $\vec{b}$;

5) вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

6) вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Задача 8. Даны координаты точек – вершин пирамиды *ABCD*:

$$A(-2; 1; 1),\ B(-3; 2; -1),\ C(5; -2; -2),\ D(-1; 0; -3).$$

Требуется:

1) вычислить длину ребра *AB*;

2) найти уравнение плоскости грани *ABC*;

3) найти угол α между гранями *ABC* и *BCD*;

4) составить параметрические уравнения прямой *AB*;

5) составить канонические уравнения высоты пирамиды *DK*, проведенной из вершины *D*;

6) найти координаты точки пересечения *DK* и грани *ABC*;

7) найти угол β между ребрами *AB* и *BC*;

8) найти угол γ между ребром *AD* и гранью *ABC*;

9) сделать чертеж пирамиды в системе координат.

Решение задачи 1.

1) Вычислим длину стороны *BC* по формуле (1):

$$|BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(8-4)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad |BC| = 4\sqrt{5} \approx 8{,}9.$$

2) Составим уравнение стороны *BC*:

$$\frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-6}{-2-6} = \frac{x-4}{8-4} \quad \Leftrightarrow \quad 4(y-6) = -8(x-4) \quad \Leftrightarrow$$

$$(y-6) = -2(x-4) \quad \Leftrightarrow \quad y = -2x + 14$$ – уравнение *BC*.

3) Внутренний угол треугольника при вершине B найдем как угол между прямыми BA и BC. Для этого сначала вычислим угловой коэффициент прямой BA:

$$k_{BA}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{6-(-1)}{4-(-3)}=1,$$

и возьмем из уравнения BC угловой коэффициент прямой BC: $k_{BC}=-2$.

Из расположения точек A, B, C на координатной плоскости видно, что угол B в треугольнике ABC – острый, поэтому вычислим

$$tgB=\left|\frac{k_{BA}-k_{BC}}{1+k_{BA}k_{BC}}\right|=\left|\frac{1-(-2)}{1+(-2)}\right|=3 \quad\Rightarrow\quad \angle ABC=arctg3\approx 71{,}6^{\circ}.$$

4) Для получения уравнения высоты AK, проведенной из вершины A, используем уравнение пучка прямых и условие перпендикулярности прямых. Сначала вычислим угловой коэффициент прямой AK. Так как $AK\perp BC$, то $k_{AK}=-\frac{1}{k_{BC}}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$.

Уравнение AK получим:

$$y-y_A=k_{AK}(x-x_A) \;\Rightarrow\; y-(-1)=\frac{1}{2}(x-(-3)) \;\Leftrightarrow\; y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow$$

$x-2y+1=0$ – уравнение AK.

5) Для определения координат центра тяжести треугольника используем свойство точки пересечения его медиан: если AM – медиана треугольника и P – точка пересечения его медиан, то P делит AM в отношении 2 : 1, начиная от точки A, т.е. $\frac{|AP|}{|PM|}=\frac{2}{1}=2$.

Основание медианы AM – точка M является серединой отрезка BC. Найдем координаты точки M :

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2},\quad y_M=\frac{y_B+y_C}{2} \;\Rightarrow\; x_M=\frac{4+8}{2}=6,\quad y_M=\frac{6-2}{2}=2 \;\Rightarrow\; M(6;\,2).$$

Теперь, когда координаты концов отрезка AM известны, найдем координаты точки P, которая делит AM в отношении $\lambda=2$, начиная от точки A, по формулам деления отрезка в заданном отношении (2):

$$x_P=\frac{x_A+\lambda x_M}{1+\lambda},\quad y_P=\frac{y_A+\lambda y_M}{1+\lambda} \;\Rightarrow\; x_P=\frac{-3+2\cdot 6}{1+2}=3,\; y_P=\frac{-1+2\cdot 2}{1+2}=1 \;\Rightarrow$$

$P(3;\,1)$ – центр тяжести треугольника ABC.

6) Построим чертеж к задаче в системе координат XOY. Полученные при решении задачи результаты не противоречат чертежу.

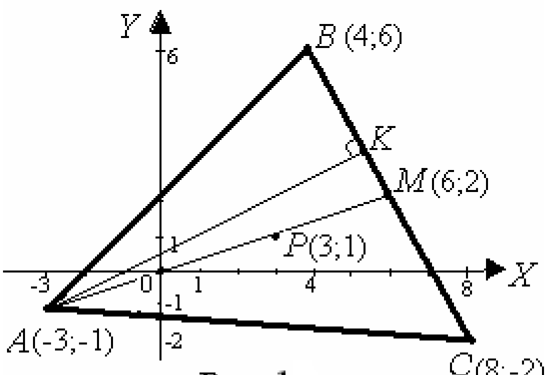


Рис. 1

Ответы:

1) длина стороны $|BC| = 4\sqrt{5} \approx 8{,}9$;

2) уравнение стороны BC: $y = -2x + 14$;

3) угол при вершине B: $\angle ABC \approx 71{,}6^\circ$;

4) уравнение высоты AK: $x - 2y + 1 = 0$;

5) координаты центра тяжести треугольника $P(3;\ 1)$;

6) чертеж .

<u>Решение задачи 2</u>.

Пусть $M(x;\ y)$ – произвольная точка на координатной плоскости, удовлетворяющую условию задачи (рис. 2), т.е. $\dfrac{|MA|}{|MK|} = \dfrac{3}{2} \iff 2|MA| = 3|MK|$,

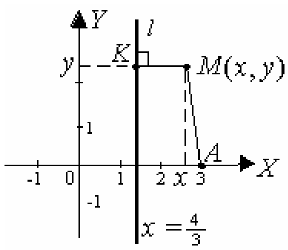


Рис. 1

где K –основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $3x = 4$. Так как K лежит на прямой $3x = 4$, то $x_K = \dfrac{4}{3} \Rightarrow K\left(\dfrac{4}{3};\ y\right)$.

Запишем условие $2|MA| = 3|MK|$ в координатной форме, используя формулу для длины отрезка:

$$2\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = 3\sqrt{\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + (y-y)^2}\,.$$

Это и есть уравнение искомой траектории, т.к. ему удовлетворяют координаты любой точки $M(x;\ y)$ на этой траектории.

Для упрощения уравнения возведем обе части равенства в квадрат и приведем подобные члены:

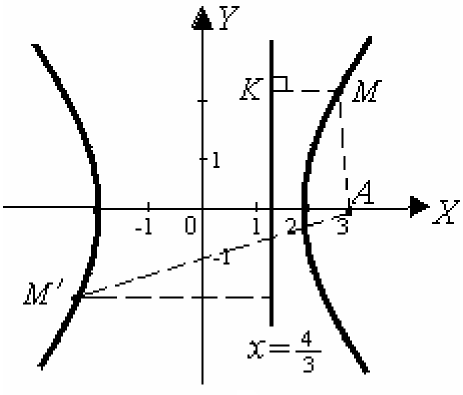


Рис. 3.

$$4(x^2-6x+9+y^2)=9(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}+0)$$

$\Leftrightarrow\quad 4x^2-24x+36+4y^2=9x^2-24x+16 \quad\Leftrightarrow\quad 5x^2-4y^2=20$, откуда получаем

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1-$ уравнение гиперболы с полуосями

$a=2,\ b=\sqrt{5}$.

Построим чертеж гиперболы в системе координат XOY (рис. 1).

Ответ: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1-$ уравнение траектории. Чертеж на рис. 13.

Решение задачи 3.

Приведем заданное уравнение кривой 2-го порядка к каноническому виду. Для этого выделим в уравнении полные квадраты по переменным x и y:

$$4x^2+9y^2-40x+36y+100=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$4(x^2-10x+25)-100+9(y^2+4y+4)-36+100=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$4(x-5)^2+9(y+2)^2=36 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1\ .$$

Получили уравнение эллипса с центром в точке $O_1(5;-2)$

Осуществив параллельный перенос осей координат в системе XOY по формулам: $\begin{cases} x_1=x-5, \\ y_1=y+2, \end{cases}$ получим каноническое уравнение эллипса

$\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}=1$ в системе координат $X_1O_1Y_1$, где $O_1(5;-2)$ в системе XOY (рис. 4).

Найдем характерные элементы эллипса: $a^2=9 \quad\Rightarrow\quad a=3;$

$$b^2=4 \quad\Rightarrow\quad b=2;\quad c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}.$$

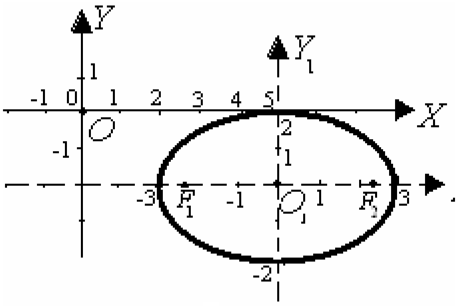
Отсюда получаем: $a=3-$ большая полуось эллипса, $b=2-$ малая полуось эллипса, $c=\sqrt{5}-$ фокусное расстояние. Координаты фокусов эллипса в системе координат $X_1O_1Y_1$: $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$.

Найдем координаты фокусов в системе координат XOY:

$$\begin{cases} x_1 = x - 5, \\ y_1 = y + 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + 5, \\ y = y_1 - 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{F_1} = -\sqrt{5} + 5, \\ y_{F_1} = 0 - 2, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_{F_2} = \sqrt{5} + 5, \\ y_{F_2} = 0 - 2. \end{cases}$$

Таким образом, координаты фокусов эллипса в системе координат XOY:
$F_1(-\sqrt{5}+5\,; -2)$, $F_2(\sqrt{5}+5\,;-2)$.

Вычислим эксцентриситет эллипса: $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}7.$



Изобразим на чертеже расположение эллипса относительно обеих систем координат (рис. 4).

Ответ: $\dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{y_1^2}{4} = 1$ – каноническое уравнение эллипса, где $\begin{cases} x_1 = x - 5, \\ y_1 = y + 2. \end{cases}$

Характерные элементы:

$O_1(5; -2)$ – центр эллипса;

$a = 3 -$ большая полуось эллипса, $b = 2 -$ малая полуось эллипса;

$c = \sqrt{5} -$ фокусное расстояние;

координаты фокусов эллипса в системе координат XOY: $F_1(-\sqrt{5}+5\,; -2)$, $F_2(\sqrt{5}+5\,;-2)$;

эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}7.$

Чертеж на рис. 4.

<u>Решение задачи 4</u>.

1) Приведем заданное уравнение кривой 2-го порядка к каноническому виду. Для этого выделим полный квадрат по переменной y (квадрат переменной x в уравнении отсутствует):

$$3x - 2y^2 + 8y - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2(y^2 - 4y + 4) + 8 = -3x + 9 \quad \Leftrightarrow$$

$$-2(y-2)^2 = -3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (y-2)^2 = 1{,}5x - 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad (y-2)^2 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Получили уравнение параболы вида $(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)^2$ с вершиной в точке $O_1\left(\dfrac{1}{3}; 2\right)$.

Осуществим параллельный перенос осей координат по формулам: $\begin{cases} x_1 = x - \dfrac{1}{3}, \\ y_1 = y - 2. \end{cases}$

В результате получим каноническое уравнение параболы $y_1^2 = 1{,}5x_1$ в системе координат $X_1O_1Y_1$.

2) Найдем точки пересечения параболы и заданной прямой в системе координат XOY. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y^2 + 8y - 9 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-2y+3) - 2y^2 + 8y - 9 = 0, \\ x = -2y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y^2 + 2y = 0, \\ x = -2y + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y(y-1) = 0, \\ x = -2y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ или } y = 1, \\ x = -2y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 1, \\ x = 1. \end{cases}$$

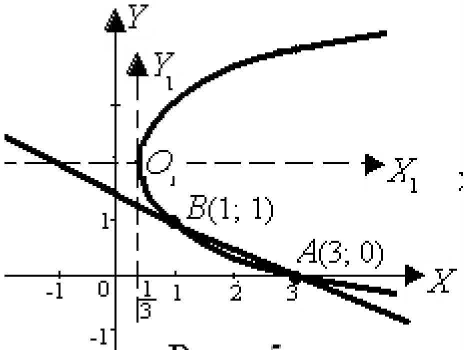


Рис. 5.

Таким образом, парабола и прямая пересекаются в точках $A(3;\,0)$ и $B(1;\,1)$.

3) Построим обе линии в системе координат XOY (рис. 5).

Ответы: 1) $y_1^2 = 1{,}5x_1$;
2) $A(3;\,0)$, $B(1;\,1)$;
3) чертеж на рис. 5.

<u>Решение задачи 5</u>.

Записываем матричный многочлен: $f(A) = 3A^2 - 5A + 2E$. Здесь E – единичная матрица той же размерности, что и A, т.е. 3-го порядка.

Найдем матрицу A^2. При умножении матрицы A на себя используем правило «строка на столбец»:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot0+0\cdot(-2) & 1\cdot2+2\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot(-1)+0\cdot4 \\ 0\cdot1+2\cdot0+(-1)(-2) & 0\cdot2+2\cdot2+(-1)\cdot1 & 0\cdot0+2\cdot(-1)+(-1)\cdot4 \\ -2\cdot1+1\cdot0+4\cdot(-2) & (-2)\cdot2+1\cdot2+4\cdot1 & -2\cdot0+1\cdot(-1)+4\cdot4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \\ -10 & 2 & 15 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу $2E$, используя правило умножения матрицы на число:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем значение матричного многочлена $f(A)$, используя правило умножения матрицы на число и правило сложения матриц:

$$f(A)=3A^2-5A+2E=3\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \\ -10 & 2 & 15 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 18 & -6 \\ 6 & 9 & -18 \\ -30 & 6 & 45 \end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & -5 \\ -10 & 5 & 20 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-5+2 & 18-10+0 & -6-0+0 \\ 6-0+0 & 9-10+2 & -18+5+0 \\ -30+10+0 & 6-5+0 & 45-20+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $f(A)=\begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}.$

Решение задачи 6.

1) Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или } AX=B, \text{ где}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Во втором уравнении системы отсутствует неизвестная x_3, т.е. $a_{23}=0$).

2) Решим систему с помощью формул Крамера. Для этого составляем главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных в левых частях уравнений и три вспомогательных определителя:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычислим эти определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)\cdot 1 + 4\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 5 - 2\cdot(-3)\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot 5 - 4\cdot 2\cdot 1 = -9+20+6-8=9.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8\cdot(-3)\cdot 1 + 4\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 7\cdot 5 - 2(-3)\cdot 0 - 8\cdot 0\cdot 5 - 4\cdot 7\cdot 1 = -24+70-28=18;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 7\cdot 1 + 8\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 0 - 2\cdot 7\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot 0 - 8\cdot 2\cdot 1 = 21-14-16=-9;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 3(-3)\cdot 0 + 4\cdot 7\cdot 1 + 8\cdot 2\cdot 5 - 8(-3)\cdot 1 - 3\cdot 7\cdot 5 - 4\cdot 2\cdot 0 = 28+80+24-105=27.$$

Найдем решение системы по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-9}{9} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{27}{9} = 3.$$

3) Решим систему при помощи обратной матрицы.

а) Определитель $\det A = \Delta = 9 \neq 0,$ следовательно, обратная матрица существует.

б) Чтобы найти союзную матрицу A^* к матрице $A,$ необходимо вычислить алгебраические дополнения всех ее элементов:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3-0=-3; \; A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2-0) = -2; \; A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10+3=13;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(4-10) = 6; \; A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-2=1; \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(15-4) = -11;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0+6=6; \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-4) = 4; \; A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9-8=-17.$$

Тогда союзная матрица : $A^* = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 13 & -11 & -17 \end{pmatrix}.$

в) Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3 & 6 & 6\\ -2 & 1 & 4\\ 13 & -11 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{13}{9} & -\frac{11}{9} & -\frac{17}{9}\end{pmatrix}.$$

г) Получим решение системы при помощи обратной матрицы (правило «строка на столбец»):

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3 & 6 & 6\\ -2 & 1 & 4\\ 13 & -11 & -17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\7\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-24+42+0\\ -16+7+0\\ 104-77+0\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}18\\-9\\27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1=2;\quad x_2=-1;\quad x_3=3.$$

Решение, полученное матричным способом, совпадает с тем, которое получено по формулам Крамера, что подтверждает правильность этого решения.

Ответы:

1) система в матричном виде: $AX = B$, где $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & -3 & 0\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\7\\0\end{pmatrix}$;

2) решение системы, полученное с помощью формул Крамера:

$$x_1=2;\quad x_2=-1;\quad x_3=3;$$

3) решение системы, полученное при помощи обратной матрицы:

$$x_1=2;\quad x_2=-1;\quad x_3=3.$$

<u>Решение задачи 7.</u>

1) Модуль вектора $\vec{a}$ вычисляется:

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3.$$

2) Найдем координаты вектора $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$:

$\vec{a}+\vec{b}=\{-2+0;\, 2-3;\, -1+4\}=\{-2;\, -1;\, 3\}$, $\quad 2\vec{c}=\{2\cdot 1;\, 2\cdot 0;\, 2\cdot(-2)\}=\{2;\, 0;\, -4\}$,

тогда $\vec{d}=(\vec{a}+\vec{b})-2\vec{c}=\{-2-2;\, -1-0;\, 3-(-4)\}=\{-4;\, -1;\, 7\}$.

3) Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ найдем по формуле :

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Для этого вычислим скалярное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по формуле :

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=-2\cdot 0+2\cdot(-3)+(-1)\cdot 4=-10$, затем модуль вектора $\vec{b}$:

$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, тогда $\cos\varphi = \dfrac{-10}{3 \cdot 5} = -\dfrac{2}{3}$ и

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = \pi - \arccos\frac{2}{3} \approx 180^\circ - 48{,}2^\circ = 131{,}8^\circ.$$

4) Проекцию вектора $\vec{c}$ на направление $\vec{b}$ вычислим по формуле :

$$np_b\vec{c} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) + (-2) \cdot 4}{5} = -\frac{8}{5} = -1{,}6.$$

5) Найдем площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для этого сначала находим векторное произведение этих векторов:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(8-3) - \vec{j}\,(-8+0) + \vec{k}\,(6-0) = 5\vec{i} + 8\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Следовательно, площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{25 + 64 + 36} = \frac{1}{2}\sqrt{125} = \frac{5}{2}\sqrt{5} \approx 5{,}6 \text{ (кв.ед.).}$$

6) Для вычисления объема параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ находим смешанное произведение векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12 + 8 + 0 - (3 + 0 + 0) = -7,$$

тогда объема параллелепипеда по формуле : $V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = |-7| = 7$.

Ответы:

1) модуль вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = 3$;

2) координаты вектора $\vec{d}$: $\vec{d} = \{-4; -1; 7\}$;

3) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\varphi = \arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right) \approx 131{,}8^\circ$.

4) проекция вектора $\vec{c}$ на направление вектора $\vec{b}$: $np_b\vec{c} = -1{,}6$;

5) площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $S_\Delta = \dfrac{5}{2}\sqrt{5} \approx 5{,}6$ (кв.ед.);

6) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $V = 7$ (куб.ед.).

Решение задачи 8.

1) Длину ребра AB найдем по формуле:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45.$$

2) Чтобы получить уравнение плоскости грани *ABC*, необходимо найти вектор, перпендикулярный плоскости *ABC*, т.е. вектор, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Одним из таких векторов является векторное произведение $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{AC}$. Для того, чтобы найти его, сначала вычислим координаты векторов по формуле :

$$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A\} = \{-3-(-2);\ 2-1;\ -1-1\} = \{-1;\ 1;\ -2\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{x_C - x_A;\ y_C - y_A;\ z_C - z_A\} = \{7;\ -3;\ -3\}.$$

Векторное произведение $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 17\vec{j} - 4\vec{k} = \{-9; -17; -4\}.$$

В качестве вектора нормали к плоскости *ABC* можно взять любой вектор, коллинеарный полученному, например, $\vec{n} = -\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \{9;\ 17;\ 4\}$. Используем уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2; 1; 1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}$: $9(x-(-2)) + 17(y-1) + 4(z-1) = 0 \iff$ $9x + 17y + 4z - 3 = 0$ – уравнение плоскости грани *ABC*.

3) Прежде, чем найти угол α между гранями *ABC* и *BCD*, получим уравнение грани *BCD*, используя уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $B(-3; 2; -1)$, $C(5; -2; -2)$, $D(-1; 0; -3)$:

$$(BCD): \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z+1 \\ 5+3 & -2-2 & -2+1 \\ -1+3 & 0-2 & -3+1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z+1 \\ 8 & -4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$(x+3)\cdot\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (z+1)\cdot\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$(x+3)(8-2) - (y-2)(-16+2) + (z+1)(-16+8) = 0 \iff 6(x+3) + 14(y-2) - 8(z+1) = 0$$

$\iff 6x + 14y - 8z - 18 = 0 \iff 3x + 7y - 4z - 9 = 0$ – уравнение грани *BCD*.

Из уравнения плоскости *BCD* возьмем координаты вектора нормали $\vec{n}_1$, перпендикулярного этой плоскости: $\vec{n}_1 = \{3;\ 7;\ -4\}$.

Косинус угла α между плоскостями (гранями) *ABC* и *BCD* найдем по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_1|} = \frac{|9 \cdot 3 + 17 \cdot 7 + 4 \cdot (-4)|}{\sqrt{9^2 + 17^2 + 4^2}\ \sqrt{3^2 + 7^2 + (-4)^2}} = \frac{130}{\sqrt{386} \cdot \sqrt{74}} = \frac{65}{\sqrt{7141}} \approx 0{,}77.$$

Отсюда $\alpha \approx \arccos 0{,}77 \approx 39{,}6^{\circ}$.

4) Уравнения ребра *AB* можно записать как параметрические уравнения прямой, проходящей через точку *A*(–2;1;1) и имеющей направляющий вектор $\overline{AB}$ = {–1; 1; –2} :

$$AB:\begin{cases} x=-2+(-1)\cdot t, \\ y=1+1\cdot t, \\ z=1+(-2)\cdot t, \end{cases} \quad \text{т.е.} \begin{cases} x=-2-t, \\ y=1+t, \\ z=1-2t \end{cases}$$ – параметрические уравнения *AB*.

Другой способ: можно использовать уравнения прямой, проходящей через две точки $A(-2;1;1)$, $B(-3;2;-1)$:

$$AB:\frac{x+2}{-3+2}=\frac{y-1}{2-1}=\frac{z-1}{-1-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2},$$

откуда, обозначив каждую из дробей буквой *t*, получаем:

$$\frac{x+2}{-1}=t,\ \frac{y-1}{1}=t,\ \frac{z-1}{-2}=t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-2-t, \\ y=1+t, \\ z=1-2t \end{cases}$$ – параметрические уравнения *AB*.

5) Высота пирамиды *DK* – это прямая, проведенная из вершины *D* перпендикулярно грани *ABC*. Она имеет направляющий вектор $\vec{S}$, коллинеарный вектору нормали плоскости *ABC*. Можно взять, например, $\vec{S}=\vec{n}=$ {9; 17; 4}. Запишем канонические уравнения высоты *DK*, используя точку *D*(–1; 0; –3) и вектор $\vec{S}$={9; 17; 4} :

$$\frac{x-(-1)}{9}=\frac{y-0}{17}=\frac{z-(-3)}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{9}=\frac{y}{17}=\frac{z+3}{4}$$ – канонические уравнения *DK*.

6) Прежде, чем найти точку пересечения *DK* и грани *ABC*, получим параметрические уравнения прямой *DK*. Обозначив каждую из дробей в канонических уравнениях буквой *t*, получаем:

$$\frac{x+1}{9}=t,\ \frac{y}{17}=t,\ \frac{z+3}{4}=t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-1+9t, \\ y=17t, \\ z=-3+4t \end{cases}$$ – параметрические уравнения *DK*.

Точка пересечения *DK* и грани *ABC* (точка *K*) лежит на прямой, а значит, имеет координаты $x_K=-1+9t,\ y_K=17t,\ z_K=-3+4t$, и принадлежит плоскости, т.е. ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости *ABC*. Поэтому координаты точки *K* найдем, решив систему:

$$\begin{cases} x_K=-1+9t, \\ y_K=17t, \\ z_K=-3+4t, \\ 9x_K+17y_K+4z_K-3=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_K=-1+9t, \\ y_K=17t, \\ z_K=-3+4t, \\ 9(-1+9t)+17(17t)+4(-3+4t)-3=0. \end{cases}$$

Решим последнее уравнение относительно t:

$$-9+81t+289t-12+16t-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad 386t=24 \quad \Leftrightarrow \quad t=\frac{24}{386}=\frac{12}{193}.$$

Вычислим координаты точки K, подставив найденное значение параметра t в первые три уравнения системы:

$$x_K=-1+9\cdot\frac{12}{193}=-\frac{85}{193}; \quad y_K=17\cdot\frac{12}{193}=\frac{204}{193}; \quad z_K=-3+4\cdot\frac{12}{193}=-\frac{531}{193}.$$

Итак, точка пересечения DK и грани ABC: $K\left(-\frac{85}{193}; \frac{204}{193}; -\frac{531}{193}\right)$.

7) Угол β между ребрами AB и BC найдем, как угол между направляющими векторами прямых AB и BC: $\overrightarrow{AB}=\{-1;\ 1;\ -2\}$ и $\overrightarrow{BC}=\{x_C-x_B;\ y_C-y_B;\ z_C-z_B\}=\{8;\ -4;\ -1\}$. Вычислим косинус угла β по формуле:

$$\cos\beta=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{|-1\cdot 8+1\cdot(-4)+(-2)\cdot(-1)|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{8^2+(-4)^2+(-1)^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{81}}=\frac{10}{9\sqrt{6}}\approx 0{,}45.$$

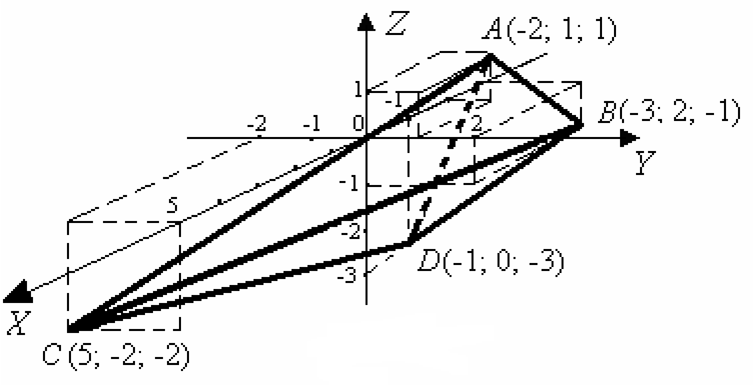
Тогда угол между ребрами AB и BC: $\beta\approx\arccos(0{,}45)\approx 63{,}3^{\circ}$.

8) Чтобы определить угол γ между ребром AD и гранью ABC, найдем направляющий вектор прямой: $\overrightarrow{AD}=\{x_D-x_A;\ y_D-y_A;\ z_D-z_A\}=\{1;\ -1;\ -4\}$. Плоскость ABC имеет вектор нормали $\vec{n}=\{9;\ 17;\ 4\}$. Синус угла γ между прямой AD и плоскостью ABC можно вычислить по формуле :

$$\sin\gamma=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{|9\cdot 1+17\cdot(-1)+4\cdot(-4)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{9^2+17^2+4^2}}=\frac{|-24|}{\sqrt{18}\sqrt{386}}=\frac{4}{\sqrt{193}}\approx 0{,}29.$$

Тогда угол между ребром AD и гранью ABC: $\gamma\approx\arcsin(0{,}29)\approx 16{,}9^{\circ}$.

9) Выполним чертеж пирамиды в системе координат (рис. 6).



Ответы:

1) $|AB| = \sqrt{6} \approx 2{,}45;$

2) $ABC\colon 9x + 17y + 4z - 3 = 0;$

3) $\alpha \approx \arccos 0{,}77 \approx 39{,}6^{\circ};$

4) $AB : \begin{cases} x = -2 - t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 - 2t; \end{cases}$

5) $DK\colon \dfrac{x+1}{9} = \dfrac{y}{17} = \dfrac{z+3}{4};$ 6) $K\left(-\dfrac{85}{193}; \dfrac{204}{193}; -\dfrac{531}{193}\right);$

7) $\beta \approx \arccos(0{,}45) \approx 63{,}3^{\circ};$ 8) $\gamma \approx \arcsin(0{,}29) \approx 16{,}9^{\circ};$

9) чертеж пирамиды на рис. 6.